# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

Množina $M$ je přímka parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Položíme $g(t) = f(\frac{1}{2}, t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

Množina $M$ je přímka parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Položíme $g(t) = f(\frac{1}{2}, t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \frac{1}{2^2} + t^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

Množina $M$ je přímka parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Položíme $g(t) = f(\frac{1}{2}, t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \frac{1}{2^2} + t^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.

Dále $g'(t) = 2t + \frac{1}{3}$ a jediný stacionární bod je $-\frac{1}{6}$.

Navíc $g''(t) = 2 > 0$ a funkce $g$ je konvexní na $\mathbb{R}$ a tedy $-\frac{1}{6}$ je bodem lokálního i globálního minima.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

Množina $M$ je přímka parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Položíme $g(t) = f(\frac{1}{2}, t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \frac{1}{2^2} + t^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.

Dále $g'(t) = 2t + \frac{1}{3}$ a jediný stacionární bod je $-\frac{1}{6}$.

Navíc $g''(t) = 2 > 0$ a funkce $g$ je konvexní na $\mathbb{R}$ a tedy $-\frac{1}{6}$ je bodem lokálního i globálního minima.

Lokální (ani globální) maximum funkce $g$ neexistuje ($g$ je zároveň neomezená shora).

Funkce $f$ tedy má vzhledem k $M$ lokální i globální minimum v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ lokální (ani globální) maximum nemá.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}\}$.

Množina $M$ je přímka parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Položíme $g(t) = f(\frac{1}{2}, t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \frac{1}{2^2} + t^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot t = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.

Dále $g'(t) = 2t + \frac{1}{3}$ a jediný stacionární bod je $-\frac{1}{6}$.

Navíc $g''(t) = 2 > 0$ a funkce $g$ je konvexní na $\mathbb{R}$ a tedy $-\frac{1}{6}$ je bodem lokálního i globálního minima.

Lokální (ani globální) maximum funkce $g$ neexistuje ($g$ je zároveň neomezená shora).

Funkce $f$ tedy má vzhledem k $M$ lokální i globální minimum v bodě $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ lokální (ani globální) maximum nemá.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Množina $M$ je kružnice parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Položíme $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Množina $M$ je kružnice parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Položíme $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \frac{2}{3}\cos t \sin t = 1 + \frac{1}{3}\sin 2t$.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Množina $M$ je kružnice parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Položíme $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \frac{2}{3}\cos t \sin t = 1 + \frac{1}{3}\sin 2t$.

To dává $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jako body lokálního a globálního maxima a $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jako body lokálního a globálního minima.

# Elementární příklady

Spočítáme lokální a globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Množina $M$ je kružnice parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Položíme $g(t) = f(\cos t, \sin t)$. A vyšetříme extrémy funkce $g$ na $\mathbb{R}$.

Máme $g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t + \frac{2}{3}\cos t \sin t = 1 + \frac{1}{3}\sin 2t$.

To dává $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jako body lokálního a globálního maxima a $\frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ jako body lokálního a globálního minima.

Funkce $f$ tedy má vzhledem k $M$ lokální i globální minima v bodech

$$
\begin{aligned}
\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right), \sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right), \quad & f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{2}{3}, \\
\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}\right), \sin\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)\right), \quad & f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{2}{3},
\end{aligned}
$$

a lokální i globální maxima v bodech

$$
\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right), \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right), \quad & f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{4}{3}, \\
\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right), \sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right), \quad & f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \tfrac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

# Trocha teorie

## Věta (o nabývání globálních extrémů)

*Nechť $f$ je funkce definovaná na množině $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^d$.*
*Předpokládejme, že*

- *$f$ je spojitá na $M$,*
- *$M$ je uzavřená a omezená*

*Potom $f$ nabývá globálního minima i globálního maxima vzhledem k $M$.*

## Triviální pozorování

Nechť $f$ nabývá v bodě $x$ globálního minima/maxima (vzhledem k $M$), potom $f$ nabývá v bodě $x$ lokálního minima/maxima (vzhledem k $M$, případně vzhledem k jakékoliv $M' \subset M$, $a \in M'$).

# Jak poznáme uzavřenou (a otevřenou) množinu

## Věta (charakterizace spojitých zobrazení)

*Nechť $P$ a $X$ jsou metrické prostory a $f : P \to X$ zobrazení, potom jsou následedející tvrzení ekvivalentní:*

- *$f$ je spojité*
- *$f^{-1}(U)$ je otevřená pro každou $U \subseteq X$ otrevřenou*
- *$f^{-1}(K)$ je uzavřená pro každou $K \subseteq X$ uzavřenou*

Navíc

- uzavřené intervaly jsou uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}$,
- otevřené intervaly jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$.

Tedy např.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y \leq 1\}$$

je uzavřená, protože $M = f^{-1}((-\infty, 1])$ pro $f(x, y) = x^4 + y$, podobně

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y \geq 1\} = f^{-1}([1, \infty)),$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

# Jak poznáme uzavřenou (a otevřenou) množinu

## Věta (charakterizace spojitých zobrazení)

*Nechť $P$ a $X$ jsou metrické prostory a $f : P \to X$ zobrazení, potom jsou následející tvrzení ekvivalentní:*

- *$f$ je spojité*
- *$f^{-1}(U)$ je otevřená pro každou $U \subseteq X$ otrevřenou*
- *$f^{-1}(K)$ je uzavřená pro každou $K \subseteq X$ uzavřenou*

Navíc

- uzavřené intervaly jsou uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}$,
- otevřené intervaly jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}$.

Tedy např.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y < 1\}$$

je otevřená, protože $M = f^{-1}((-\infty, 1))$ pro $f(x, y) = x^4 + y$, podobně

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y > 1\} = f^{-1}((1, \infty)).$$

# Elementární příklady

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

# Elementární příklady

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu $M$ si rozdělíme na sjednocení množin

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1,\ x < \tfrac{1}{2}\}$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x = \tfrac{1}{2}\}$$
$$M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \tfrac{1}{2}\}$$

# Elementární příklady

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu $M$ si rozdělíme na sjednocení množin

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1,\ x < \tfrac{1}{2}\} \\ M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x = \tfrac{1}{2}\} \\ M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \tfrac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Položme $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ a $H(x,y) = x - \frac{1}{2}$. Potom víme, že

- $M_1$ je otevřená ($M_1 = G^{-1}((-\infty,0)) \cap H^{-1}((-\infty,0))$),
- $M_2$ je parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$, $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$,
- $M_3$ je parametrizovatelná zobrazením $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.
- $M$ je uzavřená ($M = G^{-1}(-\infty,0] \cap H^{-1}(-\infty,0]$) a omezená.
- $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_1$ je otevřená.

Je-li bod $(x,y)$ bodem lokálního extrému $f$ vzhledem k $M_1$, potom $\nabla f(x,y) = (0,0)$, tj.

$$2x + \frac{2}{3}y = 0, \quad 2y + \frac{2}{3}x = 0,$$

což je, právě když $x = y = 0$. Zároveň $(0,0) \in M_1$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_2$ je parametrizovatelná pomocí $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, t)$, $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_2$ je parametrizovatelná pomocí $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, t)$, $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Položme $g(t) = f \circ \gamma(t) = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.
Je-li bod $(x,y)$ je bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M_2$, potom musí existuvat $T$, $(x,y) = \gamma(T)$, že $T$ je bodem globálního extrému $g$ vzhledem k $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_2$ je parametrizovatelná pomocí $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, t)$, $t \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Položme $g(t) = f \circ \gamma(t) = \frac{1}{4} + t^2 + \frac{1}{3}t$.

Je-li bod $(x,y)$ je bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M_2$, potom musí existuvat $T$, $(x,y) = \gamma(T)$, že $T$ je bodem globálního extrému $g$ vzhledem k $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Je-li $T$ bodem globálního (lokálního) extrému $g$ vzhledem k $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, potom platí jedna z možností

(a) $T = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (krajní body jsou vždy podezřelé) $\to (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$,

(b) $T \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $g'(T) = 0$, což dává $T = -\frac{1}{6} \to (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$,

(c) $T \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $g'(T)$ neexistuje $\to$ nic.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_3$ je parametrizovatelná pomocí $\xi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_3$ je parametrizovatelná pomocí $\xi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

Položme $h(t) = f \circ \xi(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin 2t$.

Je-li bod $(x,y)$ je bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M_3$, potom $(x,y) = \xi(T)$, kde $T$ je bodem globálního extrému $h$ vzhledem k $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M_3$ je parametrizovatelná pomocí $\xi(t) = (\cos t, \sin t),\ t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

Položme $h(t) = f \circ \xi(t) = 1 + \frac{1}{3}\sin 2t$.

Je-li bod $(x,y)$ je bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M_3$, potom $(x,y) = \xi(T)$, kde $T$ je bodem globálního extrému $h$ vzhledem k $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

Je-li $T$ bodem globálního (lokálního) extrému $h$ vzhledem k $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, potom platí jedna z možností

(a) $T = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (krajní body jsou vždy podezřelé) $\to (\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$,

(b) $T \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ a $h'(T) = 0$, což dává $T = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ $\to (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$,

(c) $T \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ a $h'(T)$ neexistuje $\to$ nic.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \le \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M$ je uzavřená a omezená.
- $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1,\ x \le \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M$ je uzavřená a omezená.
- $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Je-li $(x,y)$ bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M$, potom platí jedna z následujících možností

(A) $(x,y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_1$, což dává bod $(0,0)$

(B) $(x,y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_2$, což dává body $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$,

(C) $(x,y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_3$, což dává body $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že

- $M$ je uzavřená a omezená.
- $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Je-li $(x, y)$ bodem globálního extrému $f$ vzhledem k $M$, potom platí jedna z následujících možností

(A) $(x, y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_1$, což dává bod $(0, 0)$

(B) $(x, y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_2$, což dává body $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$,

(C) $(x, y)$ je bodem lokálního (globálního) extrému $f$ vzhledem k $M_3$, což dává body $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

Navíc, $f$ nabývá na $M$ globálního minima i globálního maxima.

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Víme, že $f$ nabývá na $M$ globálního minima i globálního maxima a že to musí být v jednom z bodů

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{6}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

# Elementární příklady

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

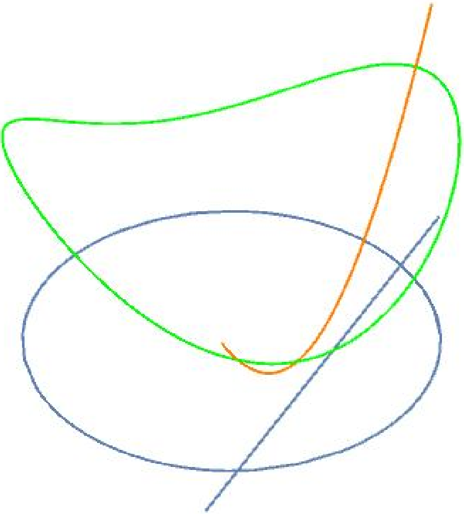
Víme, že $f$ nabývá na $M$ globálního minima i globálního maxima a že to musí být v jednom z bodů

$$(0,0),\ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{6}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

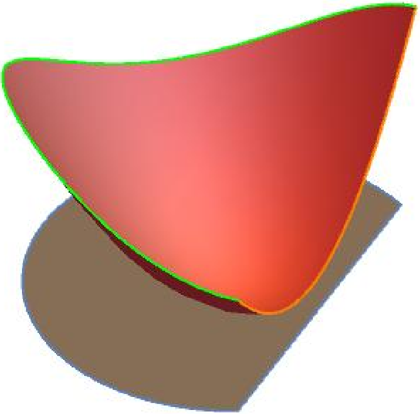
Máme

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \rightarrow \text{minimum},\\
f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2\sqrt{3}},\\
f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2\sqrt{3}},\\
f(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{6}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{18},\\
f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3},\\
f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \rightarrow \text{maximum}.
\end{aligned}$$

# Elementární příklady



# Elementární příklady



# Když nemáme parametrizaci

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*Nechť $m, d \in \mathbb{N}$, $m < d$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Položme*

$$M = \{x \in G : g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

*Nechť $f$ má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. *vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a)$.*

# Když nemáme parametrizaci

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*Nechť* $m, d \in \mathbb{N}$, $m < d$, $G \subset \mathbb{R}^d$ *otevřená,* $f, g_1, \dots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. *Položme*

$$M = \{x \in G : g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0\}.$$

*Nechť* $f$ *má v bodě* $a \in M$ *lokální extrém vzhledem k* $M$, *potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. *vektory* $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ *jsou lineárně závislé,*
2. *existují* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *taková, že* $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a)$.

- Podmínka 1. udává body, kde nejsme schopni nalézt lokální parametrizaci pomocí věty o implicitní funkci.
- Podmínka 2. odpovídá rovnicím, které dostaneme pomocí parametrizace podle věty o implicitní funkci (ale má i snadný geometrický význam).

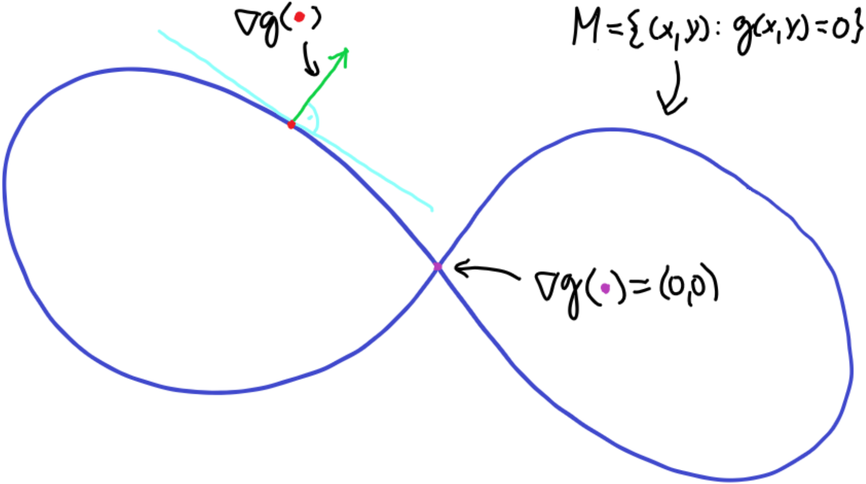
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

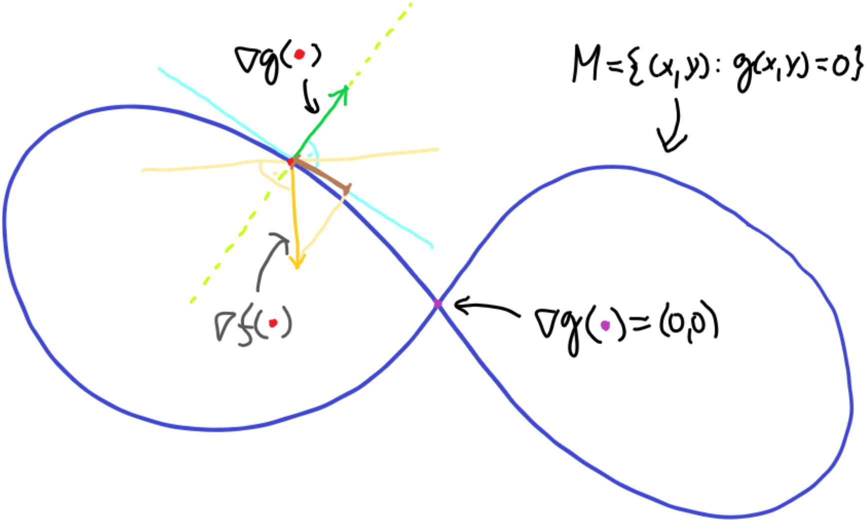
*$G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ a $f$ má v bodě $(a_1, a_2) \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a_1, a_2) = (0, 0)$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.

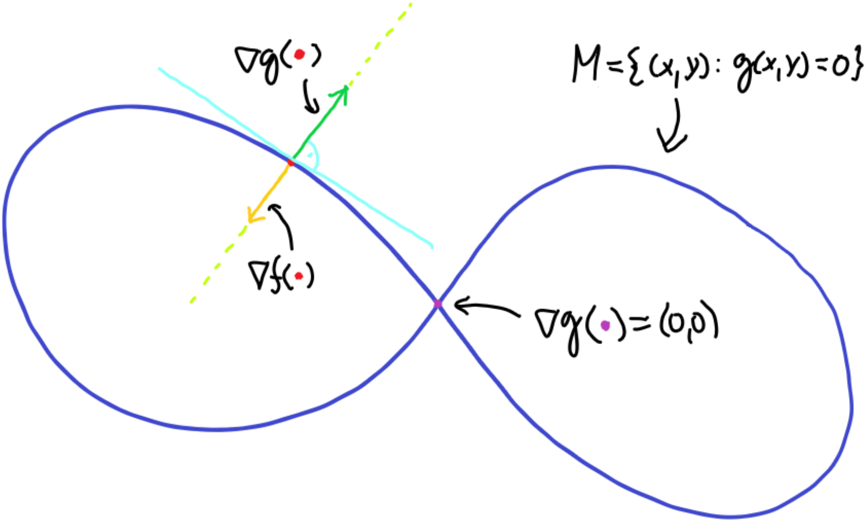
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$



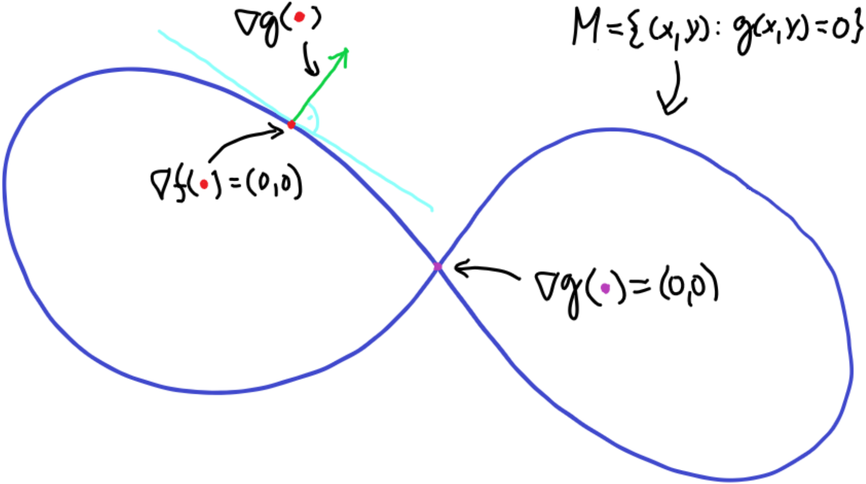
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ a $f$ má v bodě $(a_1, a_2) \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a_1, a_2) = (0, 0)$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ a $f$ má v bodě $(a_1, a_2) \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a_1, a_2) = (0, 0)$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ a $f$ má v bodě $(a_1, a_2) \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a_1, a_2) = (0, 0)$,
2. *existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.*

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Je $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ pro $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$,

a máme $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Podmínka 1 tedy není splněna v žádném bodě, protože $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ jen pro $(x, y) = (0, 0)$, ale $(0, 0) \notin M$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ a $f$ má v bodě $(a_1, a_2) \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a_1, a_2) = (0, 0)$,
2. *existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že $\nabla f(a_1, a_2) = \lambda \nabla g(a_1, a_2)$.*

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Je $M = \{(x, y) \in G : g(x, y) = 0\}$ pro $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $G = \mathbb{R}^2$,

a máme $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Podmínka 1 tedy není splněna v žádném bodě, protože $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ jen pro $(x, y) = (0, 0)$, ale $(0, 0) \notin M$.

Rovnice z podmínky 2 má tvar $(\nabla f(x, y) = (2x + \frac{2}{3}y, 2y + \frac{2}{3}x))$

$$2x + \tfrac{2}{3}y = 2\lambda x,$$
$$2y + \tfrac{2}{3}x = 2\lambda y.$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hledáme $(x, y) \in M$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující rovnice

$$\begin{aligned} 2x + \tfrac{2}{3}y &= 2\lambda x, \\ 2y + \tfrac{2}{3}x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hledáme $(x, y) \in M$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující rovnice

$$\begin{aligned} 2x + \tfrac{2}{3}y &= 2\lambda x, \\ 2y + \tfrac{2}{3}x &= 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Předně si všimneme, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Z prvních dvou rovnic tedy můžeme vyjádřit $\lambda$, dostáváme

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{y}{x} &= \lambda \to A, \\ 1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{x}{y} &= \lambda \to B, \\ x^2 + y^2 &= 1 \to C. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hledáme $(x, y) \in M$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující rovnice

$$
\begin{aligned}
1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{y}{x} &= \lambda \to A, \\
1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{x}{y} &= \lambda \to B, \\
x^2 + y^2 &= 1 \to C.
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hledáme $(x, y) \in M$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující rovnice

$$
\begin{aligned}
1 + \frac{1}{3}\frac{y}{x} &= \lambda \to A,\\
1 + \frac{1}{3}\frac{x}{y} &= \lambda \to B,\\
x^2 + y^2 &= 1 \to C.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A, B \to \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \to x^2 = y^2 \xrightarrow{C} 2x^2 = 1 &\to x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\to x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\to x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\to x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Hledáme $(x, y) \in M$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující následující rovnice

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{y}{x} &= \lambda \to A, \\ 1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{x}{y} &= \lambda \to B, \\ x^2 + y^2 &= 1 \to C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A, B \to \tfrac{x}{y} = \tfrac{y}{x} \to x^2 = y^2 \overset{C}{\to} 2x^2 = 1 \to\ & x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \to\ & x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, y = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \to\ & x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \to\ & x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, y = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dostáváme tedy možné body lokálního extrému $f$ vzhledem k $M$

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Možné body lokálního extrému $f$ vzhledem k $M$ jsou

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Možné body lokálního extrému $f$ vzhledem k $M$ jsou

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Obvyklý argument:

- $M$ uzavřená ($M = g^{-1}(\{0\})$) a omezená, $f$ spojitá vzhledem k $M$ a tedy $f$ nabývá globálního maxima/minima vzhledem k $M$,
- body globálního extrému musí být i body lokálního extrému.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Možné body lokálního extrému $f$ vzhledem k $M$ jsou

$$(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$

Obvyklý argument:

- $M$ uzavřená ($M = g^{-1}(\{0\})$) a omezená, $f$ spojitá vzhledem k $M$ a tedy $f$ nabývá globálního maxima/minima vzhledem k $M$,
- body globálního extrému musí být i body lokálního extrému.

Pro určení bodů globálního maxima a minima jen porovnáme hodnoty

$$\begin{aligned}
f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{4}{3} && \to \text{maximum},\\
f(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{2}{3} && \to \text{minimum},\\
f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{2}{3} && \to \text{minimum},\\
f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) &= \tfrac{4}{3} && \to \text{maximum}.
\end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Podobně pro globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu si rozdělíme na dvě části

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x = \tfrac{1}{2}\},$$
$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x < \tfrac{1}{2}\}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Podobně pro globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu si rozdělíme na dvě části

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x = \tfrac{1}{2}\},$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x < \tfrac{1}{2}\}$$

Množina $M_1$ je dvoubodová a oba body si necháme jako kandidáty na globální extrém. Jde o body $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Podobně pro globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu si rozdělíme na dvě části

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x = \tfrac{1}{2}\},$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x < \tfrac{1}{2}\}$$

Množina $M_1$ je dvoubodová a oba body si necháme jako kandidáty na globální extrém. Jde o body $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Množinu $M_2$ si vyjádříme ve tvaru vhodném pro Lagrangeovy multiplikátory

$$M_2 = \{(x,y) \in G : x^2 + y^2 - 1 = 0\}, \quad \text{kde} \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \tfrac{1}{2}\}.$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Podobně pro globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \leq \frac{1}{2}\}$.

Množinu si rozdělíme na dvě části

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x = \tfrac{1}{2}\},$$
$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x < \tfrac{1}{2}\}$$

Množina $M_1$ je dvoubodová a oba body si necháme jako kandidáty na globální extrém. Jde o body $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ a $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Množinu $M_2$ si vyjádříme ve tvaru vhodném pro Lagrangeovy multiplikátory

$$M_2 = \{(x,y) \in G : x^2 + y^2 - 1 = 0\}, \quad \text{kde} \quad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \tfrac{1}{2}\}.$$

Dále postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, jen s tím, že body hledáme jen v množině $G$. Dostaneme body $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Použijeme obvyklý argument (omezená, uzavřená, globální $\to$ lokální). A pak už jen stačí porovnat funkční hodnoty.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in G : g(x) = 0\}$ a $f$ má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a) = 0$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in G : g(x) = 0\}$ a $f$ má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a) = 0$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in G : g(x) = 0\}$ a $f$ má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a) = 0$,
2. *existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.*

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 1$.
Pro podmínku 1 spočítáme $\nabla g(x, y, z) = (4x^3, 2y, 2z)$. Pro řešení rovnice $\nabla g(x, y, z) = 0$ musí platit $x = y = z = 0$, ale $(0, 0, 0) \notin M$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

## Věta (o Lagrangeových multiplikátorech)

*$G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in G : g(x) = 0\}$ a $f$ má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k $M$, potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(a) = 0$,
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$, *že* $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$.

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 1$.
Pro podmínku 1 spočítáme $\nabla g(x, y, z) = (4x^3, 2y, 2z)$. Pro řešení rovnice $\nabla g(x, y, z) = 0$ musí platit $x = y = z = 0$, ale $(0, 0, 0) \notin M$.
Z podmínky 2 dostáváme soustavu ($\nabla f(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz)$)

$$
\begin{aligned}
yz^2 &= 4\lambda x^3,\\
xz^2 &= 2\lambda y,\\
2xyz &= 2\lambda z,\\
x^4 + y^2 + z^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\
xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\
2xyz &= 2\lambda z \to C, \\
x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D.
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Rádi bychom eliminovali $\lambda$, k tomu potřebujeme $x, y, z \neq 0$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Rádi bychom eliminovali $\lambda$, k tomu potřebujeme $x, y, z \neq 0$.

$$\begin{array}{cccccccc} x = 0 & \xrightarrow{A} & yz^2 = 0 & \to & y = 0 & \xrightarrow{D} & z^2 = 1 & \to & z = 1 \\ & & & & & & & \to & z = -1 \\ & & & \to & z = 0 & \xrightarrow{D} & y^2 = 1 & \to & y = 1 \\ & & & & & & & \to & y = -1 \\ y = 0 & \xrightarrow{B} & xz^2 = 0 & \to & x = 0 & \to & \text{tady jsme byli} & & \\ & & & \to & z = 0 & \xrightarrow{D} & x^4 = 1 & \to & x = 1 \\ & & & & & & & \to & x = -1. \end{array}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Zbývá $z \neq 0$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Zbývá $z \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} z = 0 & \stackrel{A,B}{\to} & \lambda = 0 & \stackrel{D}{\to} & x^4 + y^2 = 1 & \to & y = \sqrt{1 - x^4} \\ & & & & & \to & y = -\sqrt{1 - x^4} \\ & & x = y = 0 & \to & \text{slepá ulička} & & \end{array}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Zbývá $z \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} z = 0 & \stackrel{A,B}{\to} & \lambda = 0 & \stackrel{D}{\to} & x^4 + y^2 = 1 & \to & y = \sqrt{1 - x^4} \\ & & & & & \to & y = -\sqrt{1 - x^4} \\ & & x = y = 0 & \to & \text{slepá ulička} & & \end{array}$$

Dostáváme tedy body

$$(0,0,\pm 1),\ (0,\pm 1,0),\ (\pm 1,0,0),\ (x,\pm\sqrt{1-x^2},0).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A,\\
xz^2 &= 2\lambda y \to B,\\
2xyz &= 2\lambda z \to C,\\
x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D.
\end{aligned}
$$

Zbývá $z \neq 0$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
z = 0 & \overset{A,B}{\to} & \lambda = 0 & \overset{D}{\to} & x^4 + y^2 = 1 & \to & y = \sqrt{1 - x^4}\\
 & & & & & \to & y = -\sqrt{1 - x^4}\\
 & & x = y = 0 & \to & \text{slepá ulička} & &
\end{array}
$$

Dostáváme tedy body

$$(0, 0, \pm 1),\ (0, \pm 1, 0),\ (\pm 1, 0, 0),\ (x, \pm\sqrt{1 - x^2}, 0).$$

Poznamenejme, že toto bylo vše jen pro zajímavost.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$
\begin{aligned}
yz^2 &= 4\lambda x^3 \rightarrow A, \\
xz^2 &= 2\lambda y \rightarrow B, \\
2xyz &= 2\lambda z \rightarrow C, \\
x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \rightarrow D.
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} yz^2 &= 4\lambda x^3 \to A, \\ xz^2 &= 2\lambda y \to B, \\ 2xyz &= 2\lambda z \to C, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

Pokud $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, potom

$$\begin{aligned} \frac{yz^2}{2x^3} &= 2\lambda \to E, \\ \frac{xz^2}{y} &= 2\lambda \to F, \\ 2xy &= 2\lambda \to G, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned}
\frac{yz^2}{2x^3} &= 2\lambda \to E, \\
\frac{xz^2}{y} &= 2\lambda \to F, \\
2xy &= 2\lambda \to G, \\
x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D.
\end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} \frac{yz^2}{2x^3} &= 2\lambda \to E, \\ \frac{xz^2}{y} &= 2\lambda \to F, \\ 2xy &= 2\lambda \to G, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

$$E, F, G \quad \to \quad \frac{yz^2}{2x^3} = \frac{xz^2}{y} = 2xy \quad \to \quad y^2 = 2x^4, z^2 = 4x^4 \quad \xrightarrow{D} \quad 7x^4 = 1$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} \frac{yz^2}{2x^3} &= 2\lambda \to E, \\ \frac{xz^2}{y} &= 2\lambda \to F, \\ 2xy &= 2\lambda \to G, \\ x^4 + y^2 + z^2 &= 1 \to D. \end{aligned}$$

$$E, F, G \quad \to \quad \frac{yz^2}{2x^3} = \frac{xz^2}{y} = 2xy \quad \to \quad y^2 = 2x^4, z^2 = 4x^4 \quad \xrightarrow{D} \quad 7x^4 = 1$$

To nám dává celkem osm bodů tvaru $\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{7}}, \pm\sqrt{\frac{2}{7}}, \pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$ mohou být pouze body

$$(0, 0, \pm 1),\ (x, \pm\sqrt{1 - x^2}, 0),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{7}}, \pm\sqrt{\frac{2}{7}}, \pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$ mohou být pouze body

$$(0, 0, \pm 1),\ (x, \pm\sqrt{1 - x^2}, 0),\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{7}}, \pm\sqrt{\frac{2}{7}}, \pm\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

Obvyklý argument: $M$ uzavžená a omezená, globální extrémy jsou lokální. A pak už jen porovnáme hodnoty.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 1$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$ mohou být pouze body

$$(0,0,\pm 1),\ (x, \pm\sqrt{1-x^2}, 0),\ \left(\pm\tfrac{1}{\sqrt[4]{7}}, \pm\sqrt{\tfrac{2}{7}}, \pm\tfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$$

Obvyklý argument: $M$ uzavžená a omezená, globální extrémy jsou lokální. A pak už jen porovnáme hodnoty.

$$f(0,0,\pm 1) = f(x, \pm\sqrt{1-x^2}, 0) = 0,$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt[4]{7}}, \sqrt{\tfrac{2}{7}}, \pm\tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt[4]{7}}, -\sqrt{\tfrac{2}{7}}, \pm\tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) > 0 \to \text{maximum}$$

$$f\left(\tfrac{1}{\sqrt[4]{7}}, -\sqrt{\tfrac{2}{7}}, \pm\tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) = f\left(-\tfrac{1}{\sqrt[4]{7}}, \sqrt{\tfrac{2}{7}}, \pm\tfrac{2}{\sqrt{7}}\right) < 0 \to \text{minimum}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x,y,z) \in G : g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0\}$ pro $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 1: spočítáme

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 0),$$
$$\nabla h(x, y, z) = (2(x-1), 2y, 2z).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 1: spočítáme

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y, z) &= (2x, 2y, 0), \\ \nabla h(x, y, z) &= (2(x-1), 2y, 2z). \end{aligned}$$

Lineární závislost dává okamžitě $z = y = 0$. Potom platí

$$x^2 = 1, \quad (x-1)^2 = 4,$$

což dává $x = -1$. Máme tedy první podezřelý bod $(-1, 0, 0)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 1: spočítáme

$$\begin{aligned}\nabla g(x, y, z) &= (2x, 2y, 0),\\ \nabla h(x, y, z) &= (2(x-1), 2y, 2z).\end{aligned}$$

Lineární závislost dává okamžitě $z = y = 0$. Potom platí

$$x^2 = 1, \quad (x-1)^2 = 4,$$

což dává $x = -1$. Máme tedy první podezřelý bod $(-1, 0, 0)$.

Obecně bychom mohli řešit rovnici $\nabla g(x, y, z) \times \nabla h(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 2 dává rovnice $(\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1))$

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x + 2\kappa(x-1), \\ 0 &= 2\lambda y + 2\kappa y, \\ 1 &= 2\kappa z, \\ x^2 + y^2 &= 1, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 2 dává rovnice ($\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1)$)

$$
\begin{aligned}
2 &= 2\lambda x + 2\kappa(x-1), \\
0 &= 2\lambda y + 2\kappa y, \\
1 &= 2\kappa z, \\
x^2 + y^2 &= 1, \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 &= 4.
\end{aligned}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Množina $M$ je ve tvaru $\{(x, y, z) \in G : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ pro $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$ a $G = \mathbb{R}^3$.

Podmínky na lokální extrémy $f$ vzhledem k $M$:

1. vektory $\nabla g(a)$ a $\nabla h(a)$ jsou lineárně závislé,
2. existují $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a) + \kappa \nabla h(a)$.

Podmínka 2 dává rovnice ($\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1)$)

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x + 2\kappa(x-1), \\ 0 &= 2\lambda y + 2\kappa y, \\ 1 &= 2\kappa z, \\ x^2 + y^2 &= 1, \\ -2x + z^2 &= 2. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Podmínka 2 dává rovnice ($\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1)$)

$$\begin{aligned}
2 &= 2\lambda x + 2\kappa(x-1) \to A,\\
0 &= 2\lambda y + 2\kappa y \to B,\\
1 &= 2\kappa z \to C,\\
x^2 + y^2 &= 1 \to D,\\
-2x + z^2 &= 2 \to E.
\end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Podmínka 2 dává rovnice ($\nabla f(x,y,z) = (2,0,1)$)

$$
\begin{aligned}
2 &= 2\lambda x + 2\kappa(x-1) \to A,\\
0 &= 2\lambda y + 2\kappa y \to B,\\
1 &= 2\kappa z \to C,\\
x^2 + y^2 &= 1 \to D,\\
-2x + z^2 &= 2 \to E.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llll}
B \to y(\kappa+\lambda) = 0 \to \ y = 0 \ \xrightarrow{D} \ x^2 = 1 & \to x = -1 & \xrightarrow{C,E} & \text{slepá ulička} \\
 & \to \ x = 1 & \xrightarrow{E} & z^2 = 4 \\
\to \kappa = -\lambda \xrightarrow{A,C} 2\lambda z = -\lambda \to & \lambda = 0 & \xrightarrow{C} & \text{slepá ulička} \\
 & \to z = -\frac{1}{2} & \xrightarrow{D,E} & x = -\frac{7}{8}, y = \frac{\sqrt{15}}{8} \\
 & & \xrightarrow{D,E} & x = -\frac{7}{8}, y = -\frac{\sqrt{15}}{8}
\end{array}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Podmínka 2:

$$
\begin{array}{llllll}
B \to y(\kappa+\lambda) = 0 \to & y = 0 \xrightarrow{D} & x^2 = 1 & \to x = -1 & \xrightarrow{C,E} & \text{slepá ulička} \\
 & & & \to x = 1 & \xrightarrow{E} & z^2 = 4 \\
 & \to \kappa = -\lambda \xrightarrow{A,C} & 2\lambda z = -\lambda \to & \lambda = 0 & \xrightarrow{C} & \text{slepá ulička} \\
 & & & \to z = -\frac{1}{2} & \xrightarrow{D,E} & x = -\frac{7}{8}, y = \frac{\sqrt{15}}{8} \\
 & & & & \xrightarrow{D,E} & x = -\frac{7}{8}, y = -\frac{\sqrt{15}}{8}
\end{array}
$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Podmínka 2:

$$
\begin{array}{l}
B \to y(\kappa + \lambda) = 0 \to \ y = 0 \ \xrightarrow{D} \ x^2 = 1 \ \to x = -1 \xrightarrow{C,E} \quad \text{slepá ulička} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to \ x = 1 \ \xrightarrow{E} \quad z^2 = 4 \\
\qquad\qquad\qquad \to \kappa = -\lambda \xrightarrow{A,C} 2\lambda z = -\lambda \to \ \lambda = 0 \ \xrightarrow{C} \quad \text{slepá ulička} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \to z = -\frac{1}{2} \xrightarrow{D,E} \ x = -\frac{7}{8}, y = \frac{\sqrt{15}}{8} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \xrightarrow{D,E} x = -\frac{7}{8}, y = -\frac{\sqrt{15}}{8}
\end{array}
$$

Dostáváme tedy body

$$(1, 0, -2),\ (1, 0, 2),\ \left(-\tfrac{7}{8}, \tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}\right),\ \left(-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Obě podmínky dohromady dávají body

$$(-1, 0, 0),\ (1, 0, -2),\ (1, 0, 2),\ \left(-\tfrac{7}{8}, \tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}\right),\ \left(-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

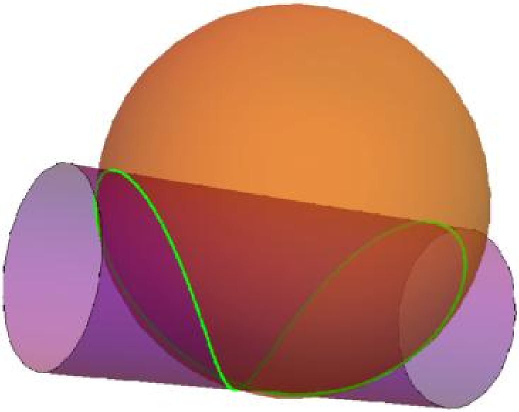
Obě podmínky dohromady dávají body

$$(-1, 0, 0),\ (1, 0, -2),\ (1, 0, 2),\ (-\tfrac{7}{8}, \tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}),\ (-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}).$$

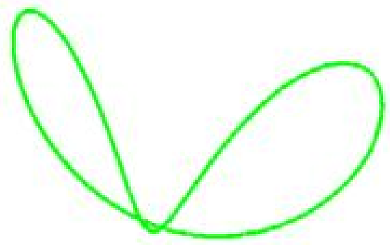
Zbývá už jen obvylký argument (množina je uzavřená omezená, globální extrémy jsou lokální), a pak už jen dosadíme a porovnáme hodnoty:

$$\begin{aligned} f(-1, 0, 0) &= -2 \\ f(1, 0, -2) &= 0, \\ f(1, 0, 2) &= 4 \to \text{maximum}, \\ f; (-\tfrac{7}{8}, \tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{9}{4} \to \text{minimum}, \\ f; (-\tfrac{7}{8}, -\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{9}{4} \to \text{minimum}. \end{aligned}$$

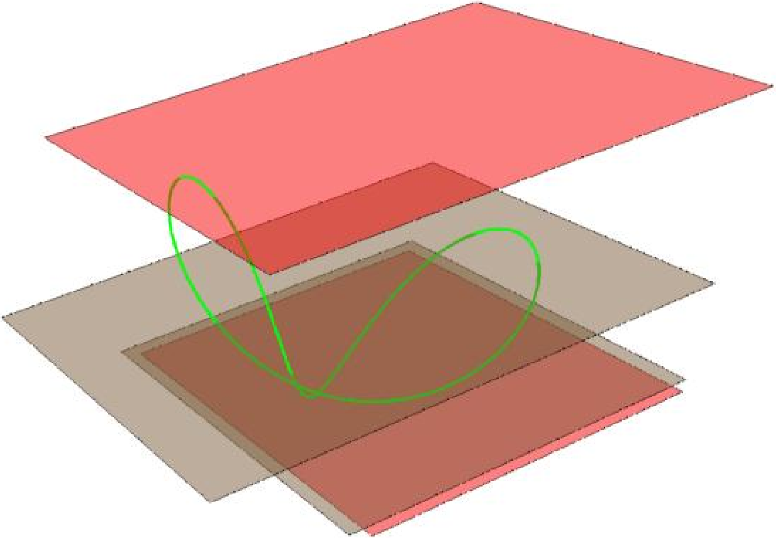
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Množinu rozdělíme na čtyři části

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},$$
$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},$$
$$M_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},$$
$$M_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},$$

a vyšetříme lokální extrémy $f$ vzhledem k $M_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Množinu rozdělíme na čtyři části

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},\\
M_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},\\
M_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},\\
M_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},
\end{aligned}$$

a vyšetříme lokální extrémy $f$ vzhledem k $M_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$M_1$ je otevřená a tedy hledáme body $(x, y, z) \in M_1$, kde $\nabla f(x, y, z) = 0$. Protože $\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1)$, žádný takový bod neexistuje.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Spočítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Množinu rozdělíme na čtyři části

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},\\
M_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},\\
M_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 < 4\},\\
M_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\},
\end{aligned}$$

a vyšetříme lokální extrémy $f$ vzhledem k $M_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$M_1$ je otevřená a tedy hledáme body $(x, y, z) \in M_1$, kde $\nabla f(x, y, z) = 0$.
Protože $\nabla f(x, y, z) = (2, 0, 1)$, žádný takový bod neexistuje.
Označíme opět

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_2$ si vyjádříme ve tvaru

$$M_2 = \{(x, y, z) \in G : h(x, y, z) = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) < 0\}.$$

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$M_2$ si vyjádříme ve tvaru

$M_2 = \{(x,y,z) \in G : h(x,y,z) = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}$.

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

Podmínka 1 dává $\nabla h(x,y,z) = 0$, tj.

$$2(x-1) = 0, \quad 2y = 0, \quad 2z = 0,$$

což dává bod $(1,0,0)$, ale $g(1,0,0) = 0$ a tedy $(1,0,0) \notin G$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_2$ si vyjádříme ve tvaru

$M_2 = \{(x,y,z) \in G : h(x,y,z) = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}.$

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

Podmínka 1 dává $\nabla h(x,y,z) = 0$, tj.

$$2(x-1) = 0, \quad 2y = 0, \quad 2z = 0,$$

což dává bod $(1,0,0)$, ale $g(1,0,0) = 0$ a tedy $(1,0,0) \notin G$.

Podmínka 2 dává (pro $(x,y,z) \in G$) soustavu

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda(x-1), \\ 0 &= 2\lambda y, \\ 1 &= 2\lambda z, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_2 = \{(x,y,z) \in G : h(x,y,z) = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}.$

Podmínka 2 dává (pro $(x,y,z) \in G$) soustavu

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda(x-1) \to A, \\ 0 &= 2\lambda y \to B, \\ 1 &= 2\lambda z \to C, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \to D. \end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4$.

$M_2 = \{(x,y,z) \in G : h(x,y,z) = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}$.

Podmínka 2 dává (pro $(x,y,z) \in G$) soustavu

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda(x-1) \to A, \\ 0 &= 2\lambda y \to B, \\ 1 &= 2\lambda z \to C, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \to D. \end{aligned}$$

Po eliminaci $\lambda$ dostaneme z $A$ a $C$ $y = 0$ a $2z = x - 1$ a $D$ dává $5z^2 = 4$.

## Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_2 = \{(x,y,z) \in G : h(x,y,z) = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}.$

Podmínka 2 dává (pro $(x,y,z) \in G$) soustavu

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda(x-1) \to A, \\ 0 &= 2\lambda y \to B, \\ 1 &= 2\lambda z \to C, \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4 \to D. \end{aligned}$$

Po eliminaci $\lambda$ dostaneme z $A$ a $C$ $y = 0$ a $2z = x - 1$ a $D$ dává $5z^2 = 4$.
Dostáváme tedy body

$$\left(1 + \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(1 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

první z nich ale neleží v $G$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině
$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_3 = \{(x,y,z) \in H : g(x,y,z) = 0\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) < 0\}.$

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_3 = \{(x,y,z) \in H : g(x,y,z) = 0\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) < 0\}.$

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

Podmínka 1 dává $\nabla g(x,y,z) = 0$, tj.

$$2x = 0, \quad 2y = 0,$$

což dává body $(0,0,\alpha)$, ale žádný takový bod neleží v $M_3$.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Značíme $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1, \quad h(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4.$

$M_3 = \{(x,y,z) \in H : g(x,y,z) = 0\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) < 0\}.$

Tedy můžeme použít Lagrangeovy multiplikátory.

Podmínka 1 dává $\nabla g(x,y,z) = 0$, tj.

$$2x = 0, \quad 2y = 0,$$

což dává body $(0,0,\alpha)$, ale žádný takový bod neleží v $M_3$.

Podmínka 2 dává (pro $(x,y,z) \in H$) soustavu

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda x, \\ 0 &= 2\lambda y, \\ 1 &= 0, \\ x^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

Která ale (zjevně) nemá žádné řešení.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Postupně jsme dostali podezřelé body

$$\begin{aligned}
M_1.M_3 \quad &\rightarrow \quad \text{nic},\\
M_2 \quad &\rightarrow \quad (1 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}),\\
M_4 \quad &\rightarrow \quad (-1,0,0),\ (1,0,-2),\ (1,0,2),\ (-\tfrac{7}{8}, \pm\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}).
\end{aligned}$$

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Postupně jsme dostali podezřelé body

$$\begin{aligned} M_1.M_3 \quad &\rightarrow \quad \text{nic}, \\ M_2 \quad &\rightarrow \quad (1 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}), \\ M_4 \quad &\rightarrow \quad (-1,0,0),\ (1,0,-2),\ (1,0,2),\ (-\tfrac{7}{8}, \pm\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Obvyklý argument: $M$ uzavřená a omezená, $f$ spojitá. Je-li $a \in M_i$ bodem globálního maxima/minima $f$ vzhledem k $M$, potom je bodem lokálního maxima/minima vzhledem k $M_i$. Pak už jen porovnáme funkční hodnoty.

# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$

Počítáme globální extrémy funkce $f(x,y,z) = 2x + z$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

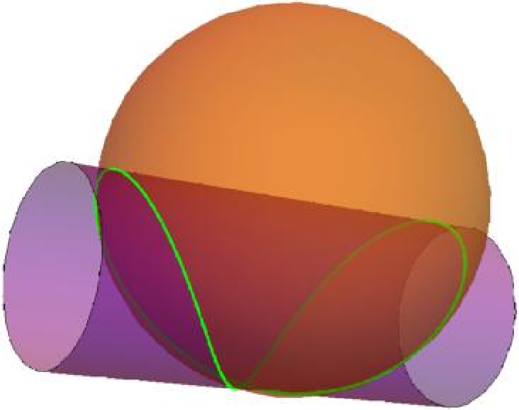
Postupně jsme dostali podezřelé body

$$\begin{aligned} M_1.M_3 &\quad\rightarrow\quad \text{nic}, \\ M_2 &\quad\rightarrow\quad (1 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}), \\ M_4 &\quad\rightarrow\quad (-1,0,0),\ (1,0,-2),\ (1,0,2),\ (-\tfrac{7}{8}, \pm\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

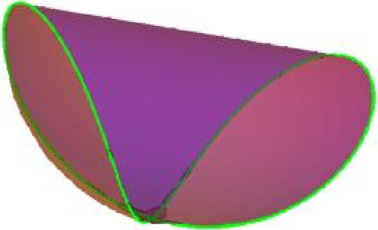
Obvyklý argument: $M$ uzavřená a omezená, $f$ spojitá. Je-li $a \in M_i$ bodem globálního maxima/minima $f$ vzhledem k $M$, potom je bodem lokálního maxima/minima vzhledem k $M_i$. Pak už jen porovnáme funkční hodnoty.

$$\begin{aligned} f(1 - \tfrac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}) &= 2 - 2\sqrt{5} \rightarrow \text{minimum} \\ f(-1,0,0) &= -2 \\ f(1,0,-2) &= 0, \\ f(1,0,2) &= 4 \rightarrow \text{maximum}, \\ f(-\tfrac{7}{8}, \pm\tfrac{\sqrt{15}}{8}, -\tfrac{1}{2}) &= -\tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

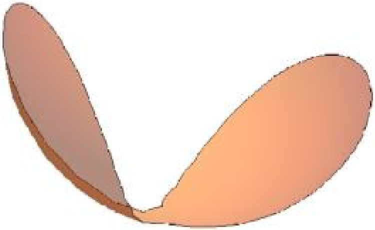
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



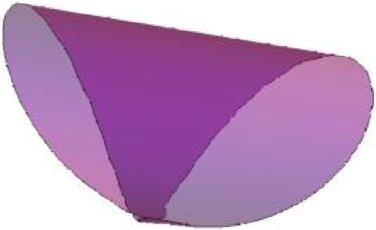
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



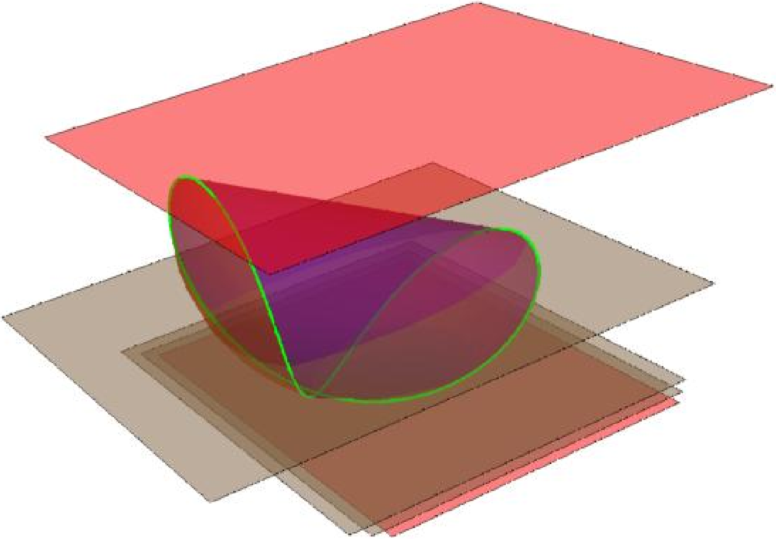
# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Lagrangeovy multiplikátory $m = 2$



# Trocha geometrie

Nechť

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

a $H$ je nadrovina v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 0\}.$$

# Trocha geometrie

Nechť

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

a $H$ je nadrovina v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 0\}.$$

Zajímá nás nejvzdálenější bod (případně body) od $H$ ležící v $M$. Protože $H = (2, 0, 1)^\perp$, platí, že chceme najít bod maxima funkce

$$(x, y, z) \mapsto |(2, 0, 1) \cdot (x, y, z)| = |2x + z|$$

pro $(x, y, z) \in M$

# Trocha geometrie

Nechť

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

a $H$ je nadrovina v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 0\}.$$

Zajímá nás nejvzdálenější bod (případně body) od $H$ ležící v $M$. Protože $H = (2, 0, 1)^\perp$, platí, že chceme najít bod maxima funkce

$$(x, y, z) \mapsto |(2, 0, 1) \cdot (x, y, z)| = |2x + z|$$

pro $(x, y, z) \in M$

My jsme spočítali, že globální minimum funkce $2x + z$ vzhledem k $M$ je v bodě $(1 - \frac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ (s hodnotou $2 - 2\sqrt{5}$) a globální maximum v bodě $(1, 0, 2)$ (s hodnotou 4). Protože $|2 - 2\sqrt{5}| < 4$, je nejvzdálenějším bodem k $H$ v $M$ bod $(1, 0, 2)$.

# Trocha geometrie

Nechť

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

a $H$ je nadrovina v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + z = 0\}.$$

Zajímá nás nejvzdálenější bod (případně body) od $H$ ležící v $M$. Protože $H = (2,0,1)^\perp$, platí, že chceme najít bod maxima funkce

$$(x,y,z) \mapsto |(2,0,1)\cdot(x,y,z)| = |2x + z|$$

pro $(x,y,z) \in M$

My jsme spočítali, že globální minimum funkce $2x+z$ vzhledem k $M$ je v bodě $(1-\frac{4}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$ (s hodnotou $2-2\sqrt{5}$) a globální maximum v bodě $(1,0,2)$ (s hodnotou 4). Protože $|2-2\sqrt{5}| < 4$, je nejvzdálenějším bodem k $H$ v $M$ bod $(1,0,2)$.

Podobně bychom postupovali například při hledání kuželu s největším objemem, jehož podstava je nějaká pevně zvolená množina v $H$ a vrchol leží v $M$.